ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ
INFORMATION TECHNOLOGY, COMPUTER SCIENCE, AND MANAGEMENT



УДК 004.94: 621.01 https://doi.org/10.23947/1992-5980-2019-19-3-281-289

Проблема математического конечноэлементного моделирования неоднородных деформируемых твердых тел с применением сканирования*

В. Л. Зыонг[1**]
[1] Иркутский национальный исследовательский технический университет, г. Иркутск, Российская Федерация

The problem of mathematical finite element modeling of inhomogeneous deformable solids using scanning***

V. L. Duong[1**]
[1] Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russian Federation

Введение. При математическом конечноэлементном моделировании используется усредненное значение механических характеристик материала деформируемых твердых тел. В авиа-, машиностроении, строительстве, медицине и других областях все шире применяются полимерные композитные материалы и материалы природного происхождения. В последнем случае реальное изменение механических характеристик значительно отличается от усредненного, следовательно, при использовании усредненных параметров для построения и анализа конечноэлементных моделей результаты могут существенно искажаться.
В данной статье описано создание математических методов исследования изменения механических характеристик материала неоднородных деформируемых твердых тел. Полученные таким образом результаты применены для построения конечноэлементных моделей и анализа их напряженно-деформированного состояния.
Материалы и методы. В качестве неоднородных деформируемых твердых тел рассмотрены материалы природного происхождения и композиты. Для исследования изменения механических характеристик материала разработан способ, основанный на использовании двух составляющих: пиксельной характеристики растровых изображений сканирования компьютерным томографом и экспериментальных данных натурных испытаний стандартных образцов.
Результаты исследования. Создан комплекс математических методов моделирования интерпретации растровых изображений сканирования компьютерным томографом, позволяющий проводить исследование любых сложных структур реальных деформируемых твердых тел. Результаты используются при построении конечноэлементных моделей таких тел с учетом неоднородности механических характеристик материала.
Анализ напряженно-деформированного состояния конечноэлементных моделей тестовых образцов доказал точность и сходимость численного решения метода конечных элементов при моделировании свойства неоднородности

Introduction. In the mathematical finite element modeling, an average value of the mechanical characteristics of the deformable solid material is used. In aircraft, machine building, construction engineering, medicine and other fields, polymer composite materials and materials of natural origin are increasingly used. In the latter case, the actual change in the mechanical characteristics differs significantly from the averaged change; therefore, when using the averaged parameters to build and analyze finite element models, the results can be significantly distorted. This paper describes the creation of mathematical methods for studying changes in the mechanical characteristics of a material of inhomogeneous deformable solids. The results obtained in this way are used to construct finite element models and analyze their stress-strain state.
Materials and Methods. Naturally occurring materials and composites are considered as inhomogeneous deformable solids. To study the changes in the mechanical characteristics of the material, a method was developed based on the use of two components: the pixel characteristics of raster images scanned by a computer tomograph and the experimental data of field tests of standard samples.
Research Results. A complex of mathematical methods has been developed for modeling the interpretation of scanning raster images by a computer tomograph, which allows for the study of any complicated structures of real deformable solids. The results are used in the construction of finite element models of such bodies considering the heterogeneity of the mechanical characteristics of the material. The analysis of the stress-strain state of finite element models of test samples has proved the accuracy and convergence of the numerical solution of the finite element method in modeling the property of heterogeneity of the mechanical characteristics of the material.



* Работа выполнена в рамках инициативной НИР.
** E-mail: bright1388@gmail.com
*** The research is done within the frame of the independent R&D.

механических характеристик материала.
Обсуждение и заключения. Разработанный подход может быть применен для любых физических принципов сканирования (рентгеновский, ультразвуковой, лазерный и др.) и для любых типов материалов, если информация, полученная в результате сканирования, сформирована в виде цифрового (растрового) изображения.

Discussion and Conclusions. The developed approach can be applied to any physical principles of scanning (X-ray, ultrasound, laser, etc.) and for any types of materials if the data obtained as a result of scanning is developed in the form of a digital (raster) image.

Ключевые слова: метод конечных элементов, деформируемое твердое тело, неоднородность, механические характеристики материала.

Keywords: finite element method, deformable solid, inhomogeneity, mechanical properties of material.

***Образец для цитирования*:** Зыонг, В. Л. Проблема математического конечноэлементного моделирования неоднородных деформируемых твердых тел с применением сканирования // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2019. — Т. 19, № 3. — С. 281−289. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2019-19-3-281-289

For citation: Duong, V.L. The problem of mathematical finite element modeling of inhomogeneous deformable solids using scanning. Vestnik of DSTU, 2019, vol. 19, no. 3, pp. 281−289 . https://doi.org/10.23947/1992-5980-2019-19-3-281-289

Введение. При конечноэлементном (КЭ) моделировании механические характеристики материала деформируемых твердых тел (ДТТ) задаются в виде усредненного значения, используемого для всей модели. Например, механические характеристики стали определяются при испытании на растяжение и сжатие стандартных образцов правильной формы. Такой подход приемлем для расчетно-инженерной практики. Однако в современном авиа-, машиностроении, строительстве, медицине и других сферах все шире применяются полимерные композиты и материалы природного происхождения. Реальное изменение механических характеристик таких материалов сильно отличается от усредненного значения, следовательно, при использовании усредненных параметров для построения и анализа конечноэлементных моделей результаты могут существенно искажаться.

Результаты исследования

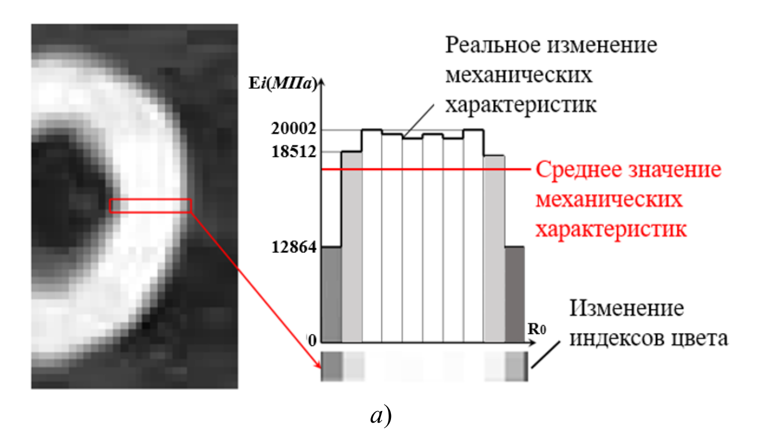
1. Основная математическая зависимость моделирования неоднородности реальных деформируемых твердых тел. Для решения представленной проблемы в работе предлагается способ определения реального изменения механических характеристик материала, основанный на использовании:

— результатов сканирования ДТТ;

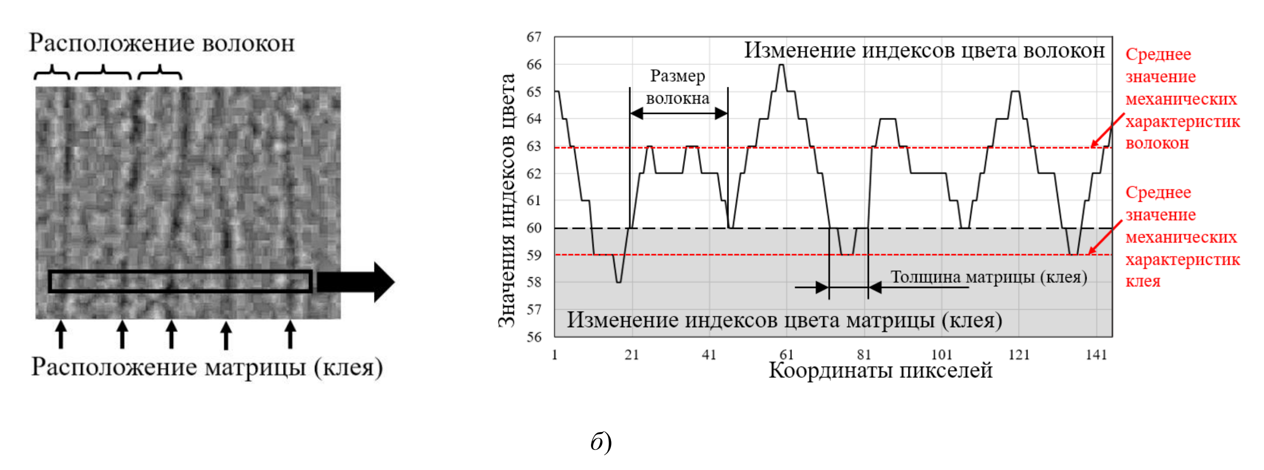
— данных натурных испытаний стандартных образцов [1].

Такой способ дает возможность распознавать любую сложную неоднородную структуру материала и применить эти данные для повышения точности и реалистичности при математическом конечноэлементном моделировании реальных ДТТ.

На рис. 1 *а* представлен пример растрового изображения сканирования материала природного происхождения (человеческой кости). В ее сечении видно изменение механических характеристик в зависимости от значений индексов цвета (пикселей) [2]. На рис. 1 *б* представлен результат сканирования композитного материала в виде растрового изображения сечения образца правильной формы (сканирование выполнено В. Г. Толстиковым). Обозначены реальные изменения механических характеристик волокон и матрицы (клея) в структуре. Кроме того, сканирование показало возможность оценить качество композитных материалов (расположение волокон, толщина слоя клея, внутренние дефекты и др.).



а)



б)

Рис. 1. Анализ растрового изображения сканирования материала природного происхождения (*а*) и композитного материала (*б*)

Общая схема математического моделирования и алгоритм предлагаемой технологии сканирования представлена на рис. 2 [2].



Рис. 2. Математическое и конечноэлементное моделирование реального деформируемого твердого тела

Схема отражает полный комплекс модулей: от сканирования ДТТ до получения его КЭ модели и анализа напряженно-деформированного состояния (НДС). При необходимости внутри каждого блока алгоритма обеспечивается цикличность операций.

Сканирование проводится с использованием компьютерного томографа (КТ). При работе с деформируемыми объектами он позволяет формировать пакет снимков, каждый из которых представляет собой растровое изображение в определенном сечении [3, 4]. Стандартные форматы растрового изображения: jpeg, dicom, bmp, png и др. Независимо от используемого формата растровое изображение необходимо представить как числовую матрицу для дальнейшей обработки.

Чтобы определить зависимость механических характеристик (например, в виде модуля упругости) от значений индексов цвета, применяется специальный весовой коэффициент [1], устанавливающий зависимость между средним значением индексов цвета $n_{ср}$ и опытным (экспериментальным) значением $E_{ОП}$. Среднее значение модуля упругости ($E_{ОП}$), полученное в эксперименте на растяжение (сжатие) стандартных образцов, используется при интерпретации механических изменений по пиксельной характеристике.

Тогда весовой коэффициент, определяющий переход от индекса цвета пикселя к модулю упругости, определяется выражением вида:

$$k_E = \frac{E_{ОП}}{n_{ср}}. \quad (1)$$

Здесь n_{cp} — среднее значение индексов цвета пакета растровых изображений сканирования:

$$n_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} I(i,j)}{mn}. \quad (2)$$

Однако для большого объема данных сканирования КТ ДТТ, имеющих высокую степень неоднородности структуры, при определении среднего значения индекса цвета необходимо использовать зависимость математического ожидания. То есть, n_{cp} определяется как среднестатистическая величина:

$$n_{cp} = E(n) = \sum_{i=1} n_i p_i(n_i), \quad (3)$$

где n_i — значение индекса цвета на интервале I; $p_i(n_i)$ — вероятность появления n_i (значения индекса цвета) на интервале I.

Пикселям, каждый из которых имеет соответствующий индекс цвета, присваиваются значения модуля упругости материала E_i. Для этого используется весовой коэффициент k_E:

$$E_i = n_i k_E. \quad (4)$$

Здесь E_i — значение модуля упругости, соответствующее значению номера индекса цвета n_i; k_E — весовой коэффициент модуля упругости.

Реализация зависимости (4) для КЭ модели выполняется решением следующих задач:

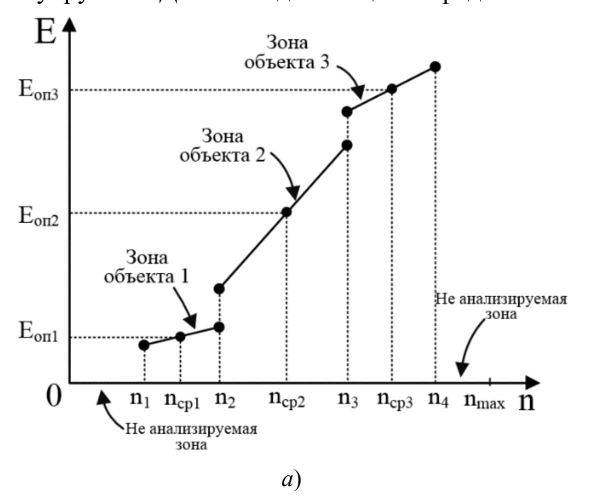
— определение зависимости механических характеристик от значений индексов цвета;

— определение механических характеристик материала в узлах и в конечных элементах КЭ модели.

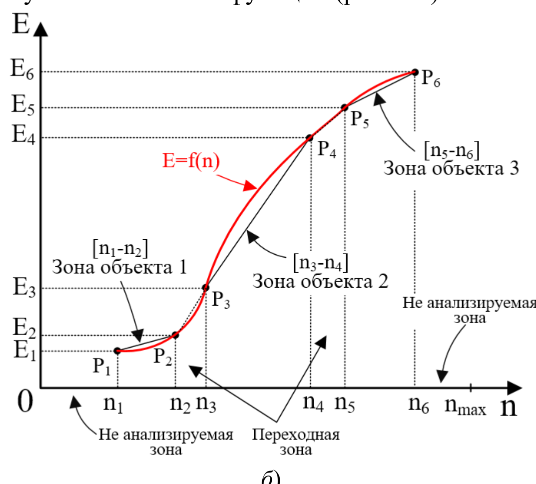
Изменение модуля упругости определяется на основе линейной или нелинейной зависимости от значений индексов цвета. Для материала, имеющего невысокую степень неоднородности, зависимость может быть построена по линейному закону (4) с использованием единственного постоянного значения весового коэффициента модуля упругости.

Однако в природе и технике такие материалы встречаются редко. Чаще всего в структуре материала ДТТ можно выделить несколько областей, каждая из которых имеет отличный от других диапазон изменения модуля упругости.

Для таких материалов предлагается применять нелинейный закон, позволяющий использовать в каждой области структуры ДТТ свое значение весового коэффициента. В этом случае зависимость изменения модуля упругости ДТТ от индексов цвета представляется в виде кусочно-линейной функции (рис. 3 *а*).



а)



б)

Рис. 3. Кусочно-линейная (*а*) и непрерывная (*б*) функция зависимости изменения модуля упругости ДТТ от значений индексов цвета

Использование кусочно-линейной функции затруднительно с точки зрения эффективности вычислительного алгоритма, в частности, по следующим причинам:

— чем больше количество областей структуры ДТТ, тем больше количество весовых коэффициентов и тем сложнее вычисление модуля упругости для узлов и конечных элементов;

— переходные значения индексов цвета между областями ДТТ или объектами представляют собой не одно значение, а диапазоны значений индексов цвета на растровом изображении (рис. 3 *б*).

Для решения этой проблемы на основе кусочно-линейной функции можно построить нелинейную зависимость в виде сплайна, например кубического [5]. Такая нелинейная зависимость модуля упругости ДТТ от

индексов цвета является универсальной при объединении нескольких зон с различным порядком механических характеристик (рис. 3 *б*).

Далее. Интерпретация данных сканирования связана с интерполяцией и передачей значений индексов цвета от пикселей к узлам КЭ сетки. В самом сложном и общем случае узлы КЭ сетки лежат между соседними плоскостями с растровым изображением. Они существенно различаются по форме и размерам. Кроме того, в них появляются дополнительные внутренние контуры и другие геометрические особенности. В этом случае для интерполяции используется ряд математических зависимостей, определяемых относительно прямой, наклонной к оси Z [6].

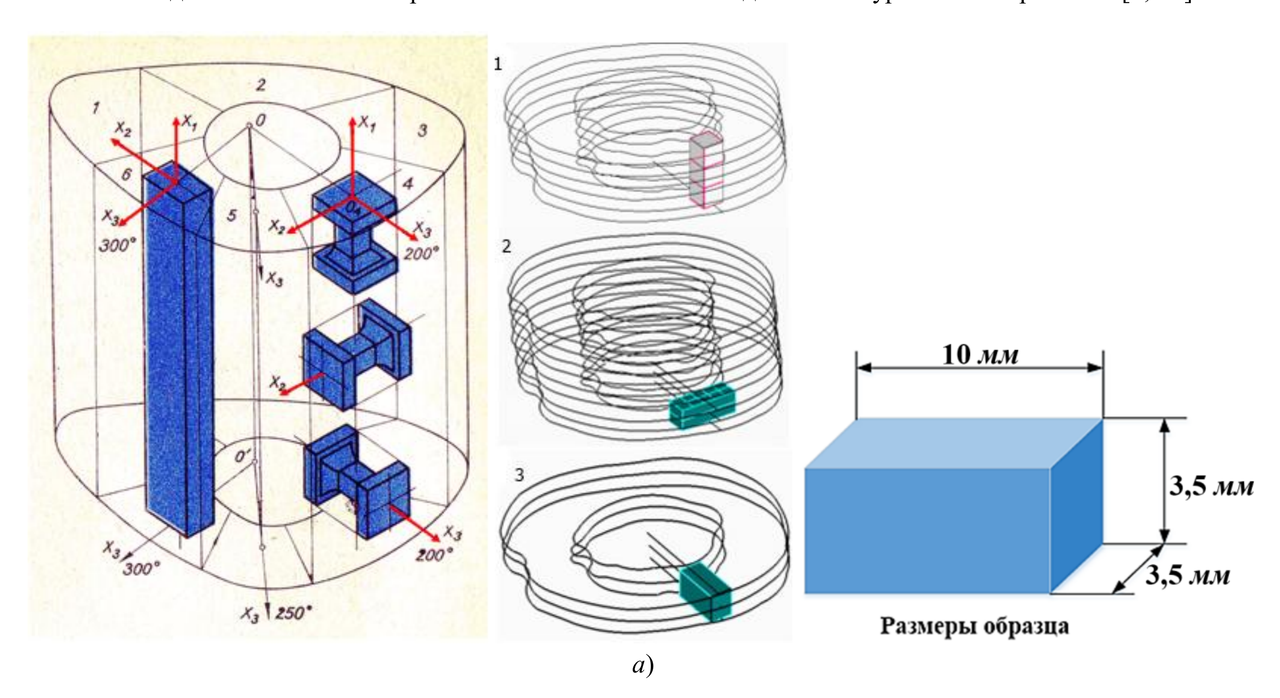
В [2] представлено более подобное описание математической зависимости и блок-схемы алгоритма модуля определения механических характеристик материала в узлах и конечных элементах КЭ модели ДТТ (рис. 2, блок 7).

Для использования в КЭ модели результаты определения неоднородности механических характеристик материала преобразуются в файл с расширением **.pcl*. Для этого задействуют две функции языка Patran Command Language: «material.create» и «elementprops_create» [7, 8].

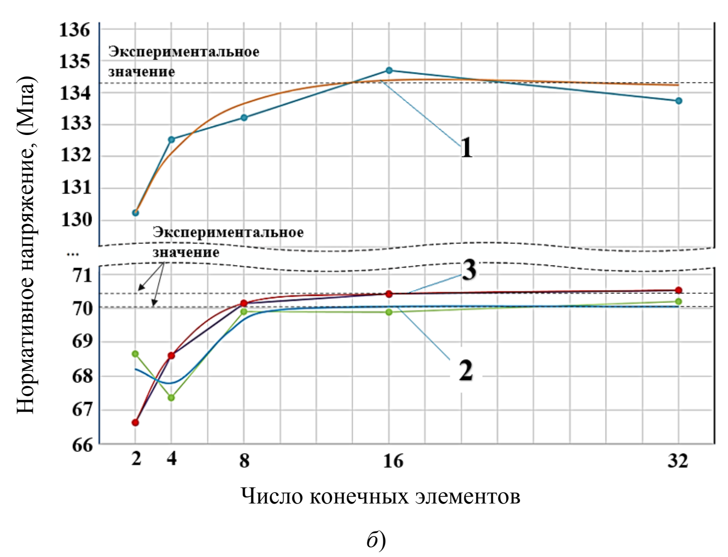
2. Исследование точности и сходимости результатов анализа КЭ моделей с учетом моделирования неоднородности механических характеристик. В рамках данной работы определены точность и сходимость численного решения методом конечных элементов (МКЭ) с применением представленной технологии. С этой целью использованы расчеты НДС костной ткани человека (фрагмент бедренной кости).

Выбор ДТТ и его анализ непринципиальны, но обусловлены важными факторами: неоднородностью материала кости, индивидуальностью ее геометрии, а также высоким уровнем технологии и качества сканирования КТ в медицине. Костная ткань хорошо изучена на практике, что позволяет обоснованно судить о корректности ее математического моделирования.

В первом исследовании используются образцы в форме параллелепипедов, вырезанные из фрагмента бедренной кости человека (рис. 4 *а*). Результаты исследования представлены на рис. 4 *б* в виде доказательства точности и сходимости численного решения МКЭ относительно данных натурного эксперимента [9, 10].



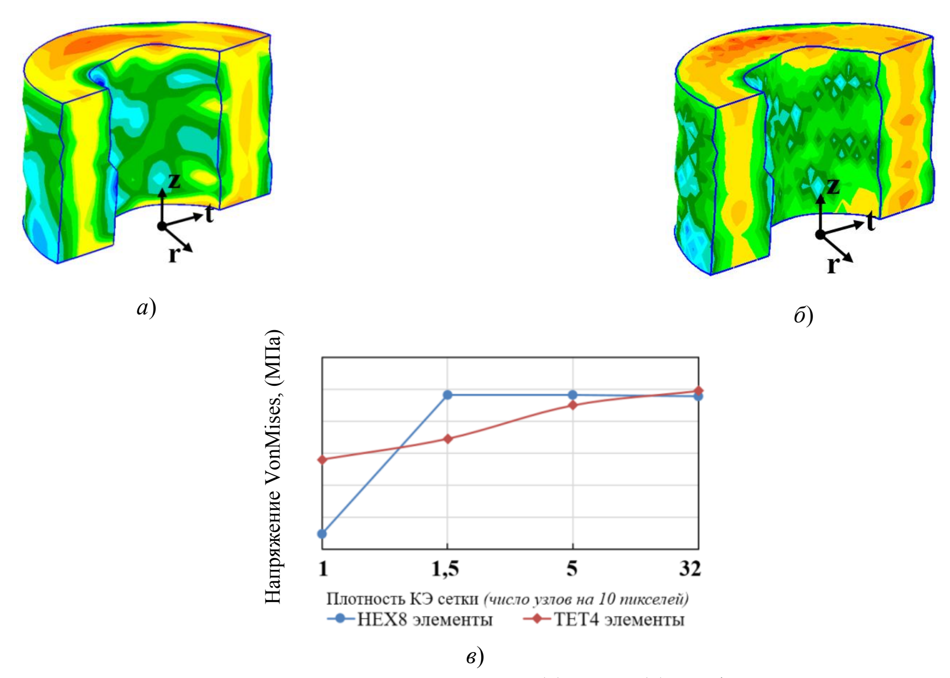
а)



б)

Рис. 4. Визуализация образцов: размеры и ориентация реальных образцов (*а*); график сходимости нормального напряжения в центре образцов (*б*), в продольном (1), окружном (2) и радиальном (3) направлениях

Результаты показывают, что для достижения необходимой точности численного решения МКЭ требуется КЭ сетка плотностью три и более конечных элемента на 1 мм [11]. Очевидно также, что свойство неоднородности механических характеристик материала ДТТ может быть отражено набором конечных элементов с собственными модулями упругости и изотропной структурой материала.



в)

Рис. 5. Результат анализа НДС с применением КЭ типа HEX (*а*) и TET (*б*); график сходимости результатов (*в*)

Для изучения применимости двух различных типов объемных КЭ (гексаэдр и тетраэдр) проведено дополнительное исследование с использованием несовместных функций формы (рис. 5) [12]. Результаты показывают, что КЭ типа гексаэдр имеет лучшие показатели по точности и сходимости результатов, а также по ресурсным затратам.

3. Моделирование реальных деформируемых твердых тел. Представленная технология применена к реальным объектам. С этой целью построено и проанализировано НДС КЭ моделей зубов с дефектом и пломбой из композитного материала. В одной модели представлен дефект в виде кариозной области (впадины) в верхней части эмали. Во втором варианте КЭ модели эта область заполнена пломбой из композитного материала. Обе модели построены с учетом неоднородности механических характеристик материала и индивидуальной геометрии.

Каркасная модель зуба человека, представленная на рис. 6 *а*, построена по результатам сканирования [13, 14]. Изменение механических характеристик материала в объемной КЭ модели (рис. 6 *б*)

смоделировано в специальной программе [13, 14]. Входные данные: результаты сканирования и натурных испытаний.

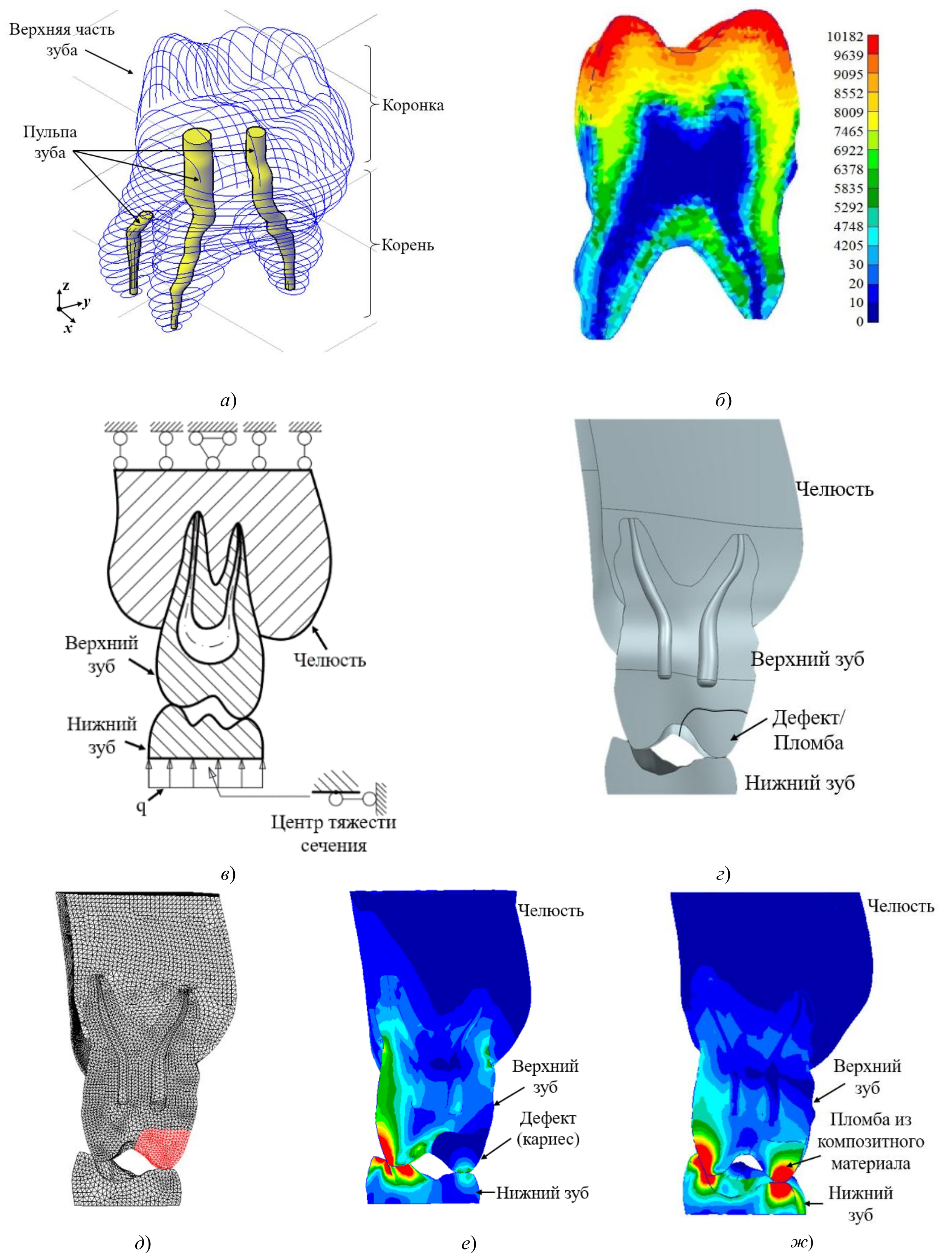


Рис. 6. Построение и анализ КЭ моделей зуба человека с учетом неоднородности механических характеристик материала: каркасная модель (*а*); изменение модуля упругости зуба в объемной КЭ модели (*б*); расчетная схема (*в*); твердотельная геометрическая модель (*г*); генерация КЭ сетки (*д*); результат анализа НДС КЭ модели зуба с моделированием дефекта (*е*); результат анализа НДС КЭ модели зуба с моделированием композитной пломбы (*ж*)

Расчетная схема представлена на рис. 6 *в*. На верхнем зубе моделируются дефект и композитная

пломба (рис. 6 *г* и *д*).

Результат анализа КЭ модели с дефектом (рис. 6 *е*) показывает, что кариозная часть зуба не воспринимает нагрузку. То есть на здоровую часть зуба приходится дополнительная нагрузка, и вероятность разрушения увеличивается. Результат анализа второй КЭ модели, после заполнения области кариеса пломбой из композитного материала (рис. 6 *ж*), показывает, что зуб практически полностью восстанавливает свои функциональные способности, так как картина напряжений идентична картине, полученной для здорового зуба [2].

Из рис. 6 *ж* видно, что максимумы напряжений наблюдаются в точках контакта на вершинах зубных бугров. Более высокая нагрузка воспринимается областью эмали и дентина. Внутренняя часть зуба менее нагружена. Данный результат сравнивается с расчетом [2]. При этом используется усредненное значение механических характеристик эмали и дентина. Неоднородность структуры материала зуба не учитывается. Сравнение показывает более равномерное распределение напряжений в теле зуба при моделировании неоднородности распределения его механических характеристик.

Обсуждение и заключения. Результаты исследования подтверждают точность и надежность представленного метода КЭ моделирования на основе сканирования реальных ДТТ с учетом неоднородности механических характеристик материала.

Представленный комплекс математических методов моделирования интерпретации растровых изображений сканирования КТ позволяет проводить исследование любых сложных структур реальных ДТТ. Результаты такого моделирования используются при построении КЭ моделей с учетом неоднородности механических характеристик материала.

Разработанная технология математического моделирования может быть применена для любых физических принципов сканирования (рентген, ультразвук, лазер и др.) и для любых типов материалов, если полученные данные представляют собой цифровое (растровое) изображение.

Библиографический список

1. Способ определения значений модуля упругости и его распределения в конструктивных элементах, обладающих неопределенными свойствами прочности : патент № 2542918 Рос. Федерация : МПК G06T 1/00 A61B 6/00 / А. А. Пыхалов [и др.]. — № 201348501/08 ; заявл. 30.10.13 ; опубл. 27.02.15, Бюл. № 6. — 15 с.

2. Пыхалов, А. А. Построение и анализ конечно-элементных моделей неоднородных деформируемых твердых тел на основе сканирования // А. А. Пыхалов, В. Л. Зыонг, В. Г. Толстиков // PNRPU Mechanics Bulletin. — 2018. — № 4. — С. 106–118.

3. Рентгеновская компьютерная томография. Руководство для врачей / Под ред. Г. Е. Труфанкова, С. Д. Рудя. — Санкт-Петербург : Фолиант, 2008. — 1200 с.

4. Марусина, М. Я. Современные виды томографии / М. Я. Марусина, А. О. Казначеева. — Санкт-Петербург : СПбГУ ИТМО, 2006. — 132 с.

5. Голованов, Н. Н. Геометрическое моделирование / Н. Н. Голованов. — Москва : Издательство физико-математической литературы, 2002. — 472 с.

6. Зыонг, В. Л. Интерполяция геометрии и неоднородности материала деформируемых тел при построении их объемных моделей методом конечных элементов на основе сканирования компьютерным томографом / В. Л. Зыонг, А. А. Пыхалов, С. Р. Татарникова // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — Иркутск : ИрГУПС. — 2017. — № 3 (55). — С. 8–16.

7. PATRAN 2013. PCL and Customization 2013 / MSC Software Corporation — Santa Ana : MSC Software Corporation, 2013. — 1010 p.

8. PATRAN 2013. PCL and Reference / MSC Software Corporation. — Santa Ana : MSC Software Corporation, 2013. — 2190 p.

9. Утенькин, А. А. Исследование механических свойств компактного вещества кости как анизотропного материала : дис. … канд. техн. наук / А. А. Утенькин. — Рига, 1974. — 199 с.

10. Кнетс, И. В. Деформирование и разрушение твердых биологических тканей / И. В. Кнетс, Г. О. Пфафрод, Ю. Ж. Саулгозис. — Рига : Зинатне, 1980. — 319 с.

11. Пыхалов, А. А. Исследование точности численного решения методом конечных элементов анализа напряженно-деформированного состояния образцов из костной ткани на основе данных компьютерного томографа и натурного эксперимента / А. А. Пыхалов, В. П. Пашков, В. Л. Зыонг // Вестник Иркут. гос. техн. ун-та. — 2017. — Т. 21, № 4. — С. 47–56.

12. Пыхалов, А. А. Контактная задача статического и динамического анализа сборных роторов турбомашин : дис. ... д-ра техн. наук / А. А. Пыхалов. — Москва, 2006. — 428 с.

13. Математическое моделирование для автоматизации обработки результатов сканирования деформируемых твердых тел сложной геометрической формы с неоднородными механическими характеристиками для построения их конечно-элементных моделей : св-во о гос. регистрации программ для ЭВМ [Электронный ресурс] / А. А. Пыхалов, В. Л. Зыонг. — № 2017661241 ; заявл. 27.06.17 ; опубл. 06.10.17. — Режим доступа : http://www1.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=EVM&DocNumber=2017661241&TypeFile=html (дата обращения : 08.08.19).

14. Математическое моделирование обработки результатов сканирования деформируемых твердых тел для построения геометрии их конечно-элементных моделей : св-во о гос. регистрации программ для ЭВМ [Электронный ресурс] / А. А. Пыхалов, В. Л. Зыонг. — № 2018615239 ; заявл. 14.03.18 ; опубл. 03.05.18. — Режим доступа : http://www1.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=EVM&DocNumber=2018615239&TypeFile=html (дата обращения : 08.08.19).

Сдана в редакцию 25.03.2019.
Запланирована в номер 17.06.2019

Об авторе:

Зыонг Ван Лам,
младший научный сотрудник кафедры «Теоретическая механика и сопротивление материалов» Иркутского национального исследовательского технического университета (РФ, 664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83),
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5605-1323
Bright1388@gmail.com